Aula 6 Lagrangianas equivalentes

É possível obter as mesmas eqs. de movimento a partir de Lagrangianas distintas. Por exemplo, dado uma certa $L(q,\dot{q},t)$, suponha que $\exists\, f(q,t)$ tal que

$$\bar{L}(q,\dot{q},t) = L + \frac{d}{dt} f(q,t) = L + \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t}$$

A ação p/ $\bar{L}$ é $\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\,dt = S + f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1)$

portanto $\delta\bar{S} = \delta S$, já que a variação é apenas sobre trajetórias que mantêm os mesmos pontos inicial e final. Assim, as eqs. de movimento advindas de $\delta S = 0$ são as mesmas que garantem $\delta\bar{S} = 0$

Alternativamente, substituindo diretamente nas eqs de Lagrange:

i) $\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_k}$

e ii) $\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{df}{dt}$ = , invertendo a ordem das derivadas

$$\therefore \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

→ $\bar{L}$ leva às mesmas eqs de mov. → L e $\bar{L}$ são equivalentes exemplo (2.3.1) Pêndulo plano com ponto de suspensão se movendo com vel. v constante (transf. de Galileu)

$$L = \frac{m}{2}\left((\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)^2\right) + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{m}{2}\left[l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}^2\right] + mgl\cos\theta$$

Se $\dot{x} = v = cte$: $\quad = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta + \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\frac{mv^2}{2}t + mlv\operatorname{sen}\theta\right]}_{\text{derivada total}}$

Obviamente, as eqs. de movimento têm de ser as mesmas, já que a mecânica clássica é invariante por transf. de um referencial inercial p/ outro.

obs: é possível em alguns casos que, mesmo quando L e $\bar{L}$ não diferem por uma derivada total, eles levem a eqs. de movimento distintas mas que têm as mesmas soluções.

i.e. $\ddot{x} + x^3 = 0$ equiv a $e^x(\ddot{x} + x^3) = 0$

e tb a $x(\ddot{x} + x^3) = 0$ ($x = 0$ faz parte das soluções de $\ddot{x} + x^3 = 0$)

ex: 2.7 $\longrightarrow$ lista

Princ. de Hamilton c/ vínculos não holônomos

caso a ser investigado: vínculos da forma

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k}\, dq_k + a_{\ell t}\, dt = 0} \qquad \ell = 1 \dots p \ (\text{nº de vínculos}) \quad (p < n)$$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k}\, \dot{q}_k + a_{\ell t} = 0} \qquad a_{\ell k} = a_{\ell k}(q_1 \cdots q_k, t)$$

(reduz ao caso holônomo se $a_{\ell k} \equiv 0$, $a_{\ell t} \neq 0$)

tipicamente: problemas com corpos em rolamento. Exclui vínculos na forma de desigualdades ou dependências mais complicadas nas vels.

Retornando ao princípio de Hamilton: se L é a lagrangeana do sistema na ausência desses vínculos, então

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k$$

mas, no caso de vínculos $\bar{n}$ holônomos, como os acima, as variações δq_k $\bar{n}$ são independentes. E $\bar{n}$ é possível nesse caso encontrar $n-p$ novas coordenadas indeps.

Lembrando: as variações δq_k são deslocamentos virtuais: a t fixo e respeitando os vínculos.

Portanto

$$\boxed{\sum_k a_{\ell k}\, \delta q_k = 0 \ ; \quad \ell = 1 \dots p}$$

O problema de extremalizar S sujeito aos vínculos entre os δq_k é uma generalização do problema do cálculo usual em que se extremaliza uma função sujeita a condições subsidiárias $\longrightarrow$ nesse caso utilizamos multiplicadores de Lagrange

P/cada vínculo, def. um multiplicador $\lambda_\ell(q, \dot{q}, t)$ [note que não é uma constante] e acrescentamos um termo identicamente nulo ao funcional do princ. Hamilt:

$$0 = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k}\,\delta q_k}_{=0} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_\ell \lambda_\ell a_{\ell k} \right) \delta q_k$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell a_{\ell k} \right\} \delta q_k = 0 \qquad (*)$$

Agora: como temos p vínculos, podemos escolher $n-p$ coords indeps $q_1 \ldots q_{n-p}$

Por outro lado, podemos escolher $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ de modo a anular os coeficientes de δq_k, $k > n-p$ em $*$. Mas pela independência dos δq_k, $k \leq n-p$, os coeficientes remanescentes também precisam se anular. Assim:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_\ell \lambda_\ell a_{\ell k} = 0 , \qquad k = 1 \ldots n} \qquad (**)$$

juntamente com as p eqs de vínculo $\sum_k a_{\ell k}\dot{q}_k + a_{\ell t} = 0$, temos $n+p$ eqs p/ $n+p$ funções $q_1 \ldots q_n ; \lambda_1 \ldots \lambda_p$

Interpretação dos mult. de Lagrange → permitem calcular as forças de vínculo!

Argumento (sutil!): no fundo, considerar uma força como sendo "de vínculo" ou não é uma escolha arbitrária. Dado um sistema A sujeito a vínculos (de qq tipo), podemos sempre considerar um sistema B descrito pelas mesmas coordenadas mas sem os vínculos, só que sujeito a forças aplicadas adicionais Q'_k cuja atuação acaba justamente levando à vigoração dos vínculos. Mas nesse caso, pelo princípio de D'Alembert:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k$$

Comparando c/ a eq. (**) vemos que, p/ a classe de vínculos ñ-holônomos lineares em $\dot{q}_k$, as forças que precisariam agir no sistema B para reproduzir as eqs. de mov. do sistema A seriam

$$\boxed{Q'_k = \sum_{l=1}^{p} a_{lk}\lambda_l}$$

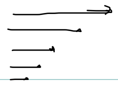
essas são assim as forças (generalizadas) de vínculo.

Podemos ainda checar que, p/ essa subclasse de vínculos ñ-holônomos

$$\delta W' = \sum_k Q'_k \delta q_k = \sum_{kl} \lambda_l a_{lk} \delta q_k = \sum_l \left(\quad / \quad \right)^{0} \lambda_l = 0$$

e as forças de vínculo realizam trabalho virtual total = 0.

ex: "esteira rolante" com vel. variando transversalmente



Vínculo : $x = \gamma y$

$q_1 = x$, $q_2 = y$: $1 \cdot \dot{q}_1 - \lambda \dot{q}_2 = 0 \longrightarrow a_{11} = 1$; $a_{12} = -\lambda y$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 a_{11} = \lambda_1 \\ m\ddot{y} = 0 \longrightarrow \boxed{y = y_0 + v_{y_0} t} \\ x = \gamma y = \gamma(y_0 + v_{y_0} t) \longrightarrow \boxed{x = x_0 + \gamma y_0 t + \frac{\gamma v_{0y} t^2}{2}} \end{cases}$$

e o mult. de Lagrange é $\lambda_1 = m\ddot{x} = m\gamma v_{0y}$ (nesse caso, λ é constante)

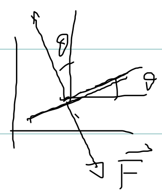
interpret: $Q_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \cdot \vec{F} = F_x = \sum_l a_{l1} \lambda_l = a_{11}\lambda_1 = \lambda_1$

Atenção: não substituir vínculos n integráveis diretamente na Lagrangiana

ex acima: ~~fazendo~~ $x = \gamma y$ teríamos: $L \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} m(\dot{y}^2 + \gamma^2 \dot{y}^2)$

e a eq. de Lagrange ficaria : $m\ddot{y} = \gamma^2 \dot{y}$! ("anti"-mola – força no mesmo sentido do movimento)

exemplo 2.4.2 : patinete (v. texto)



obs: a força de vínculo é $F_x = \lambda \operatorname{sen}\theta$, $F_y = -\lambda \cos\theta$

(atrito lateral, atuando como força centrípeta)